PROBLEMA 3: SECTOR CILÍNDRICO CON FUENTE DE VOLTAJE CONSTANTE

Se tiene un sistema constituido por un conductor homogéneo, de conductividad σ, que ocupa el volumen $0<\rho<R$, $0<\varphi<\alpha$, $|z|<\infty$, una lámina de conductor ideal conectada a 0 V en $0<\rho<R$, $\varphi=\alpha$, $|z|<\infty$, y una lámina de conductor ideal conectada a un potencial V_0 en $\rho=R$, $0<\varphi<\alpha$, $|z|<\infty$. Determina el potencial electrostático en el interior del sistema.

Solución

Por la geometría del sistema, el potencial depende de las coordenadas ρ y φ. Se requieren cuatro condiciones de frontera, que son:

a) $\lim_{\rho\to 0} \phi(\rho,\varphi)\neq\infty$

b) $\phi(\rho,\alpha)=0$

c) $\left.\dfrac{\partial\phi(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0^+}=0$

d) $\phi(R,\varphi)=V_0$

Se observa que las condiciones b y c exigen que la dependencia angular del potencial sea trigonométrica, por lo que la solución debe ser la general. Además, por la condición c la función base angular debe ser coseno, ya que es la que cumple que su derivada se anula en el origen. El potencial entonces debe ser de la forma:

$$\phi(\rho,\varphi)=\sum_n\left(A_n\rho^{k(n)}+B_n\rho^{-k(n)}\right)\cos[k(n)\varphi]$$

Por la condición a, se tiene que $B_n=0$. Por la condición b, se tiene que $\cos[k(n)\alpha]=0$, de donde:

$$k(n)=(2n-1)\frac{\pi}{2\alpha}$$

La solución toma la forma:

$$\phi(\rho,\varphi)=\sum_n A_n \rho^{(2n-1)\pi/(2\alpha)}\cos\left((2n-1)\frac{\pi\varphi}{2\alpha}\right) \quad (1)$$

Al sustituir (1) en la condición d, se tiene:

$$\phi(R,\varphi)=\sum_n A_n R^{(2n-1)\pi/(2\alpha)}\cos\left((2n-1)\frac{\pi\varphi}{2\alpha}\right)=V_0 \quad (2)$$

Para determinar los coeficientes de la solución, hay que desarrollar a V_0 en serie de cosenos en el intervalo $0<\varphi<\alpha$. Para el desarrollo en serie de cosenos con valor medio cero, el período de dicho desarrollo es $T=4\alpha$. Los coeficientes de la función constante fueron calculados en el documento "Los desarrollos en series de Fourier en la solución a la Ecuación de Laplace", obteniéndose:

$$a_m=\begin{cases}0\ (\text{si } m \text{ es par})\\ \dfrac{4V_0}{m\pi}(-1)^{(m-1)/2}\ (\text{si } m \text{ es impar})\end{cases}$$

Entonces, haciendo $m=2k-1$:

$$V_0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4V_0}{(2k-1)\pi}(-1)^{(k-1)}\cos\left((2k-1)\frac{\pi\varphi}{2\alpha}\right) \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), se tiene que $n = k$, y para los coeficientes A_k:

$$A_k = \frac{4V_0(-1)^{(k-1)}}{(2k-1)\pi} R^{-(2k-1)\frac{\pi}{2\alpha}}$$

Finalmente, el potencial electrostático en el interior del sistema resulta ser:

$$\phi(\rho,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V_0(-1)^{(k-1)}}{(2k-1)\pi} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{(2k-1)\frac{\pi}{2\alpha}} \cos\left((2k-1)\frac{\pi\varphi}{2\alpha}\right)$$

Se propone como ejercicio para el estudiante verificar que este potencial electrostático satisface las condiciones de frontera del problema.

Es oportuno mencionar que el método de separación de variables no es aplicable a la solución del potencial electrostático en el exterior del sistema considerado. Esto se debe a que las fronteras que limitan al volumen externo son tales que las condiciones de frontera en ellas no son separables.